

Основной государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в бланк ответов № 1 в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа.

Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, ответ запишите в виде десятичной.

Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

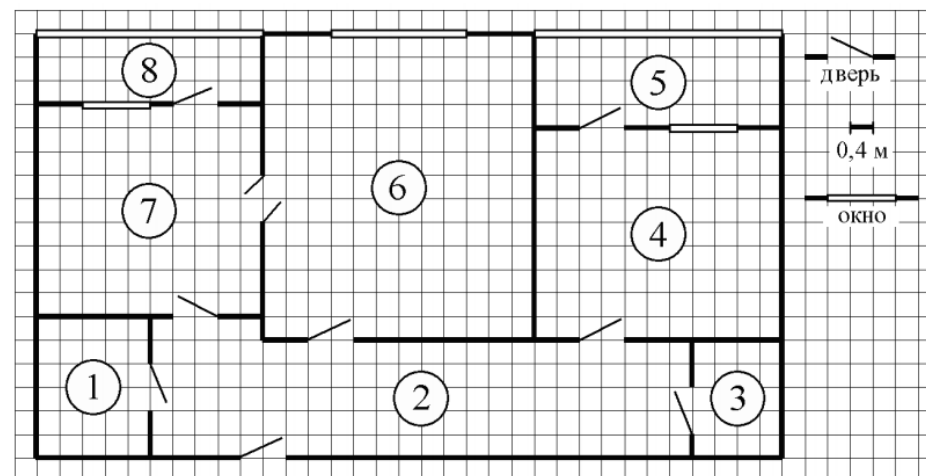
После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответами к заданиям 1–19 являются, число или последовательность цифр, которые следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Если ответом является последовательность цифр, то запишите её без пробелов и других дополнительных символов. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1–5.



На рисунке изображён план двухкомнатной квартиры в многоэтажном жилом доме. Сторона одной клетки на плане соответствует 0,4 м, а условные обозначения двери и окна приведены в правой части рисунка. Вход в квартиру находится в коридоре. Слева от входа в квартиру находится санузел, а в противоположном конце коридора — дверь в кладовую. Рядом с кладовой находится спальня, из которой можно пойти на одну из застекленных лоджий. Самое большое по площади помещение — гостиная, откуда можно попасть в коридор и на кухню. Из кухни также можно попасть на застекленную лоджию.

- 1** Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр.

Объекты	Гостиная	Санузел	Кухня	Коридор
Цифры				

- 2** Паркетная доска размером 20 см на 80 см продается в упаковках по 12 штук. Сколько упаковок паркетной доски понадобилось, чтобы выложить пол в спальне?

Ответ: _____.

- 3** Найдите площадь гостиной. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: _____.

- 4** На сколько процентов площадь коридора больше площади кладовой?

Ответ: _____.

- 5** В квартире планируется установить стиральную машину. Характеристики стиральных машин, условия подключения и доставки приведены в таблице. Планируется купить стиральную машину с фронтальной загрузкой, по глубине не превосходящую 42 см.

Модель	Вместимость барабана (кг)	Тип загрузки	Стоимость (руб.)	Стоимость подключения (руб.)	Стоимость доставки (% от стоимости машины)	Габариты (высота × ширина × глубина, см)
А	7	верт.	28 000	1700	бесплатно	85 × 60 × 45
Б	5	фронт.	24 000	4500	10	85 × 60 × 40
В	5	фронт.	25 000	5000	10	85 × 60 × 40
Г	6,5	фронт.	24 000	4500	10	85 × 60 × 44
Д	6	фронт.	28 000	1700	бесплатно	85 × 60 × 45
Е	6	верт.	27 600	2300	бесплатно	89 × 60 × 40
Ж	6	верт.	27 585	1900	10	89 × 60 × 40
З	6	фронт.	20 000	6300	15	85 × 60 × 42
И	5	фронт.	27 000	1800	бесплатно	85 × 60 × 40
К	5	верт.	27 000	1800	бесплатно	85 × 60 × 40

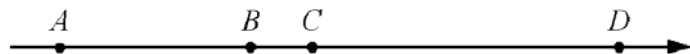
Сколько рублей будет стоить наиболее дешёвый подходящий вариант вместе с подключением и доставкой?

Ответ: _____.

- 6** Найдите значение выражения $\frac{1}{2} + \frac{31}{20}$.

Ответ: _____.

- 7 На координатной прямой отмечены точки A , B , C и D соответствуют числам $-0,032$; $0,023$; $0,302$; $-0,203$.



Какой точке соответствует число $-0,203$?

- 1) A 2) B 3) C 4) D

Ответ:

- 8 Найдите значение выражения $\sqrt{(-a)^6 \cdot a^2}$ при $a = 2$.

Ответ: _____.

- 9 Решите уравнение $-2x-7=-4x$.

Ответ: _____.

- 10 В лыжных гонках участвуют 7 спортсменов из России, 1 спортсмена из Швеции и 2 спортсмена из Норвегии. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Швеции.

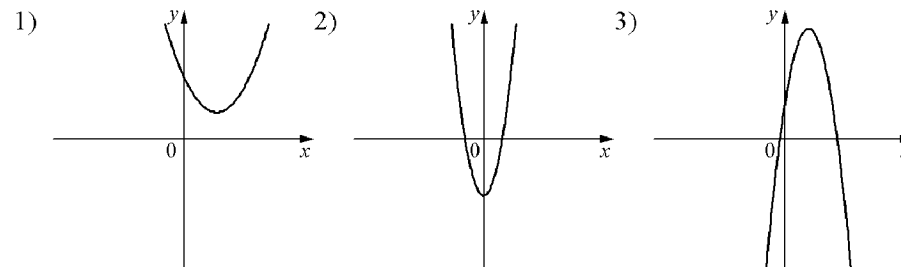
Ответ: _____.

- 11 На рисунках изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c графиками функций.

КОЭФФИЦИЕНТЫ

- А) $a > 0, c > 0$ Б) $a < 0, c > 0$ В) $a > 0, c < 0$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

- 12 В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси (в рублях) длительностью более 5 минут рассчитывается по формуле $C = 150 + 11 \cdot (t - 5)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 13-минутной поездки. Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

- 13 Укажите решение системы неравенств

$$3x - x^2 > 0$$

- 1) $(3; +\infty)$ 3) $(0; +\infty)$
2) $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$ 4) $(0; 3)$

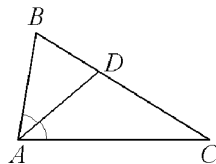
Ответ:

- 14 В амфитеатре 14 рядов. В первом ряду 18 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в девятом ряду амфитеатра?

Ответ: _____.

- 15** В треугольнике ABC известно, что угол BAC равен 84° , AD – биссектриса. Найдите угол BAD . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.



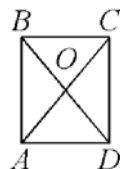
- 16** В треугольнике ABC известно, что $AC=8$, $BC=15$, угол C равен 90° . Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

Ответ: _____.



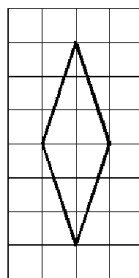
- 17** Диагонали AC и BD прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , $BO=24$, $AB=45$. Найдите AC .

Ответ: _____.



- 18** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите площадь этого ромба.

Ответ: _____.



- 19** Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Диагонали равнобедренной трапеции равны.
- 2) Если три угла одного треугольника равны соответственно трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 3) Тангенс любого острого угла меньше единицы.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

При выполнении заданий 20–25 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 = 4x + 12$.

21

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 80 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 23 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 35 часов после отплытия из него.

22

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 7 & \text{при } x \geq -4, \\ -\frac{16}{x} & \text{при } x < -4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

23

Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK , если $BH = 14$.

24

На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K . Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 16$, $MD = 4$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

- Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня x_1 и x_2 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень x_0 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Формула n -го члена арифметической прогрессии (a_n) , первый член которой равен a_1 и разность равна d :

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

- Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

- Формула n -го члена геометрической прогрессии (b_n) , первый член которой равен b_1 , а знаменатель равен q :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

- Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{(q^n - 1)b_1}{q - 1}$.

Таблица квадратов двузначных чисел

		Единицы									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Десятки	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ГЕОМЕТРИЯ

- Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

- Радиус r окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a , равен $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

- Радиус R окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a , равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

- Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

- Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- Формула длины l окружности радиуса R :

$$l = 2\pi R.$$

- Формула длины l дуги окружности радиуса R , на которую опирается центральный угол в φ градусов:

$$l = \frac{2\pi R \varphi}{360}.$$

- Формула площади S параллелограмма со стороной a и высотой h , проведённой к этой стороне: $S = ah$.

- Формула площади S треугольника со стороной a и высотой h , проведённой к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

- Формула площади S трапеции с основаниями a , b и высотой h :

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

- Формула площади S круга радиуса R : $S = \pi R^2$.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 = 4x + 12$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$(x+3)x^2 = 4(x+3); (x+3)(x^2 - 4) = 0,$$

откуда $x = -3$, $x = -2$ или $x = 2$.

Ответ: -3 ; -2 ; 2 .

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

21

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 80 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 23 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 35 часов после отплытия из него.

Решение.

Пусть собственная скорость теплохода равна v км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{80}{v-5} + \frac{80}{v+5} = 12;$$

$$80v + 400 + 80v - 400 = 12v^2 - 300;$$

$$3v^2 - 40v - 75 = 0,$$

откуда $v = 15$.

Ответ: 15 км/ч.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

22 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 7 & \text{при } x \geq -4, \\ -\frac{16}{x} & \text{при } x < -4. \end{cases}$$

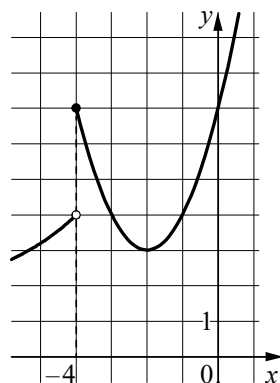
Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Построим график функции $y = -\frac{16}{x}$ при $x < -4$ и график функции $y = x^2 + 4x + 7$ при $x \geq -4$.

Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $0 < m < 3$ и при $m > 7$.

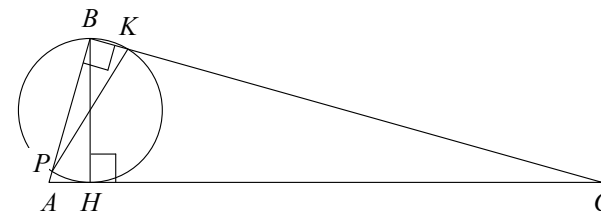
Ответ: $0 < m < 3$; $m > 7$.



Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

23 Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK , если $BH = 14$.

Решение.



Угол PBK опирается на дугу PK и равен 90° , а значит, PK — диаметр, откуда получаем, что $PK = BH = 14$.

Ответ: 14.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

- 24** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K . Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

Доказательство.

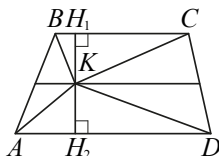
Проведём через точку K высоту H_1H_2 трапеции.

По теореме Фалеса средняя линия разделит высоту пополам.

Пусть $KH_1 = KH_2 = h$. Тогда сумма площадей треугольников BKC и AKD равна

$$h \cdot \frac{BC}{2} + h \cdot \frac{AD}{2} = h \cdot \frac{BC + AD}{2}.$$

При этом площадь трапеции равна $2h \cdot \frac{BC + AD}{2}$, что как раз вдвое больше найденной суммы площадей треугольников.

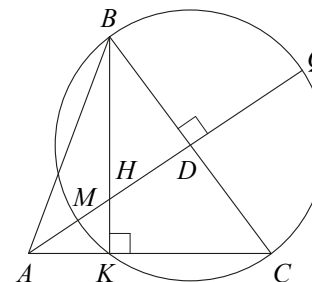


Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

- 25** На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 16$, $MD = 4$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Решение.

Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рисунок). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC , точка K лежит на стороне AC , а точка H лежит на отрезке BK .



Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q . Тогда $DQ = MD = 4$. По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 12 \cdot 20 = 240.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

откуда $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 16AH$.

Значит, $16AH = 240$. Следовательно, $AH = 15$.

Ответ: 15.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл